

06/08

Auxiliar 1 MA26B

Maximiliano Rojo

[Definiciones Previas]

Curva: $\Gamma = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / \exists t \in I, \vec{x} = \vec{\sigma}(t) \}$

con $\vec{\sigma}(t) = I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \mapsto \vec{\sigma}(t)$, t : parametrización } parametrización

Puede ser suave ($\exists \vec{\sigma} \in C^1$), simple ($\vec{\sigma}$ inyectiva) y/o regular
 ($\vec{\sigma}$ regular y $\|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\| > 0$)

Coordenadas Ortogonales: $\vec{r}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

1) Cartesianas $(x, y, z) \rightarrow \vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$

2) Cilíndricas $(\rho, \theta, z) \rightarrow \vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$

3) Esféricas $(r, \theta, \varphi) \rightarrow \vec{r}(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$

Longitud de Curva: $L = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt$

Operaciones en \mathbb{R}^3 : Producto Punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Producto cruz: Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ($\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \hat{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \hat{k}$$

Vectores: Se calculan en un punto $\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$

V. Tangente $\hat{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} / \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$

V. Normal $\hat{N}(t) = \frac{d\hat{T}(t)}{dt} / \left\| \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right\|$

V. Binormal
 $\hat{T} \times \hat{N} = \hat{B}$

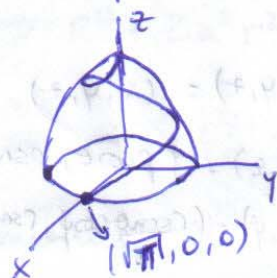
Esto en chora...

P1) Una partícula sube por una superficie parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = \pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar una vuelta en torno a la superficie.

i) Usando coord. cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se cumple $\frac{dz}{d\theta} = a$, $a > 0$.

$$(\vec{r}(0) = (\sqrt{\pi}, 0, 0))$$

ii) Determinar el vector Tangente a la curva para un punto cualquiera de esta.



Sol:

$$i) x^2 + y^2 + z = \pi \quad (*)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = a \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow dz = a d\theta \quad / \int_0^\theta \Rightarrow z = a\theta$$

$$\text{Esto, en } (*): \quad x^2 + y^2 = \pi - z = \rho^2$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\pi - z}$$

Al final del camino, $\rho = 0 \Rightarrow \pi = z$, para $\theta = 2\pi$ y como $z = a\theta \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Esto nos dice que, como $\vec{r}(\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$

$$\vec{r}(\theta) = (\sqrt{\pi - \theta/2} \cos \theta, \sqrt{\pi - \theta/2} \sin \theta, \theta/2)$$

$$ii) \quad \frac{1}{T} = \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \quad . \quad \text{Calculamos entonces } \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = \left(\frac{-1}{4\sqrt{\pi - \theta/2}} \cos \theta - \sqrt{\pi - \theta/2} \sin \theta, \frac{-1}{4\sqrt{\pi - \theta/2}} \sin \theta + \sqrt{\pi - \theta/2} \cos \theta, \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \right\| = \left(\frac{\cos^2 \theta}{16(\pi - \theta/2)} + \frac{\sin^2 \theta}{16(\pi - \theta/2)} + (\pi - \theta/2) \sin^2 \theta + (\pi - \theta/2) \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \right\| = \left(\frac{1}{16(\pi - \theta/2)} + (\pi - \theta/2) + \frac{1}{4} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 + 16(\pi - \theta/2)^2 + 4(\pi - \theta/2)}{16(\pi - \theta/2)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{(1 + 16\pi^2 - 16\pi\theta + 4\theta^2 + 4\pi - 2\theta)^{1/2}}{4\sqrt{\pi - \theta/2}} = f(\theta)$$

$$\Rightarrow \hat{T}(\theta) = \frac{1}{f(\theta)} \left(-\frac{\cos\theta}{4\sqrt{\pi - \theta/2}} + \sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta, \sqrt{\pi - \theta/2} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{4\sqrt{\pi - \theta/2}}, \frac{1}{2} \right)$$

Nota:

Si queremos obtener el vector normal, $\hat{N}(\theta) = \frac{d\hat{T}/d\theta}{\|d\hat{T}/d\theta\|}$.
 recordar que $\|d\vec{r}(\theta)/d\theta\| = f(\theta)$ no es una constante (en la mayoría de los casos), por lo que al hacer $\frac{d\hat{T}}{d\theta}$, se debe derivar el término nombrado.

P2) Se desea calcular el trabajo de la partícula en llegar a la punta, sabiendo que sobre ella se ejerce un campo vectorial $F(x, y, z) = z^2\hat{i} + 3z^2\hat{j} + 2x\hat{k}$

Sabemos que si \vec{F} es la fuerza, y \vec{r} la trayectoria que recorre la partícula, entonces se tiene que el trabajo es

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot d\theta \quad \leftarrow \text{integral de línea}$$

Estamos trabajando en cilíndricas

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{4(\pi - \theta/2)} + \cos^2\theta(\pi - \theta/2) - \sin\theta\cos\theta \right] \\ -2 \left[\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\pi - \theta/2}} + \sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta \right] \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\pi - \theta/2}} - \sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta \\ -\frac{1 \sin\theta}{2\sqrt{\pi - \theta/2}} + \sqrt{\pi - \theta/2} \cos\theta \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\cos\theta}{8\sqrt{\pi - \theta/2}} - \frac{\sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta}{4} + 3 \left(\sqrt{\pi - \theta/2} \cos\theta - \frac{1}{2} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi - \theta/2}} \right) - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{\pi - \theta/2}} - \sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta$$

$$\Rightarrow F \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{-5\cos\theta}{8\sqrt{\pi - \theta/2}} - 5\sqrt{\pi - \theta/2} \sin\theta + 3 \left(a^2(\theta) - 2a(\theta)b(\theta) + 2a(\theta)b^2(\theta) - b^3(\theta) \right) \text{ etc...}$$

P3) Una empresa de lácteos desea medir el peso de los tarros, hechos de "rollos" de aluminio, como se indica en la figura. Conociendo la densidad del Al (σ , densidad superficial), los radios mayor (b) y menor (a), el espesor de la lámina (e) y la altura del tarro, ayude a la empresa con el problema.



sol)

Sabemos que la Masa de una lámina de densidad superficial σ [kg/m^2] viene dada por

$$M = \int_{\text{sup}} \sigma dS$$

Parece un problema superficial, pero como σ es cte, tendremos que $M = \sigma \cdot \int dS = \sigma \cdot R \cdot L$, donde



Aluminio usado en n vueltas.

L será el largo de la curva-hélice que se describe (se observa) en la tapa del tarro (vista superior)

Necesitamos entonces describir dicha curva

$$r(\theta) = a + \underbrace{\frac{e}{2\pi}}_{\text{paso de la hélice}} \theta$$

siue, pues para n vueltas se tendrá $r(n \cdot 2\pi) = a + \frac{e}{2\pi} \cdot n \cdot 2\pi = a + ne = b$

De aquí, se tiene que $n = \frac{b-a}{e}$: n° de vueltas

En polares, $\vec{r}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$

θ_0 : θ inicial

θ_f : θ final

$$\Rightarrow \vec{r}(\theta_f) = b = a + \frac{e}{2\pi} \theta_f$$

$$\Rightarrow \theta_f = \left(\frac{b-a}{e}\right) \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi$$

Calculamos el Largo de la Curva $L(\Gamma)$

$$L(\Gamma) = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right\| d\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{d\theta} &= r'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + r(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right\|^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2 = \left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 + \left(a + \frac{e}{2\pi}\theta\right)^2$$

Luego, sea $\theta_0 = 0$

$$L(\Gamma) = \int_0^{\theta_f} \sqrt{\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 + \left(a + \frac{e}{2\pi}\theta\right)^2} d\theta = \frac{e}{2\pi} \int_0^{\theta_f} \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{2\pi a}{e} + \theta\right)^2}_u} d\theta$$

$$\Rightarrow L(\Gamma) = \frac{e}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{e}}^{\frac{2\pi b}{e} + \theta_f} \sqrt{1 + u^2} du = \frac{e}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{e}}^{\frac{2\pi b}{e}} \sqrt{1 + u^2} du \quad \text{por } \theta_f$$

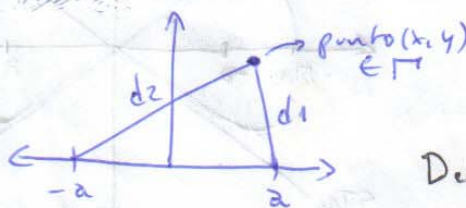
Integral que se ve en tabla...

$$\Rightarrow L(\Gamma) = \frac{e}{4\pi} \left[u\sqrt{u^2+1} + \ln(u + \sqrt{u^2+1}) \right] \Big|_{\frac{2\pi a}{e}}^{\frac{2\pi b}{e}}$$

$$\Rightarrow L(\Gamma) = \frac{1}{2} \left[b\sqrt{\left(\frac{2\pi b}{e}\right)^2 + 1} - a\sqrt{\left(\frac{2\pi a}{e}\right)^2 + 1} \right] + \frac{e}{4\pi} \ln \left[\frac{\frac{2\pi b}{e} + \sqrt{e^2 + 4\pi^2 b^2}}{\frac{2\pi a}{e} + \sqrt{e^2 + 4\pi^2 a^2}} \right]$$

\Rightarrow Conocemos la Masa del Taro!!

4) Parametrizar una curva plana cuyos puntos satisfacen:
el producto de las distancias a 2 focos en la órbita,
de coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ es cte igual a $b = a^2$



$$d_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}$$

Del enunciado, $d_1 \cdot d_2 = a^2$

$$\Rightarrow d_1^2 \cdot d_2^2 = a^4$$

$$[(a-x)^2 + y^2][(a+x)^2 + y^2] = a^4$$

$$(a^2 - x^2)^2 + y^2[(a-x)^2 + (a+x)^2] + y^4 = a^4$$

$$a^4 - 2a^2x^2 + x^4 + 2y^2[x^2 + a^2] + y^4 = a^4$$

$$\Rightarrow x^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 = 0$$

$$\Rightarrow [(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2)] = 0$$

Describiremos esto en polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
con $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow r^4 + 2a^2r^2(\underbrace{\sin^2\theta - \cos^2\theta}_{-\cos 2\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow r^2[r^2 - 2a^2\cos 2\theta] = 0 \rightarrow \text{Solución trivial } r=0 \text{ no interesante}$$

$$\text{Tomando } r \neq 0 \rightarrow r^2 - 2a^2\cos 2\theta = 0$$

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

Tenemos una restricción: $r \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2\theta \in [0, 4\pi] \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

$$1 \cos 2\theta \geq 0$$

$$\rightarrow 2\theta \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2] \cup [7\pi/2, 4\pi]$$

$$\Rightarrow \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi] = I$$

Luego

$$r(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2a^2\cos 2\theta} & (\theta \in I) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

